Pareto 最优前沿识别的卷积核与神经网络实现

摘要

1 简介和相关研究

2 问题定义

3 算法及证明

4 仿真实验

5 结论

参考文献

摘要：

关键字：

1 简介

工程应用和科学研究中的众多问题都是优化问题，实际问题是复杂的，往往需要同时考虑多个优化目标，这一类问题具有重要应用价值和理论研究意义。将具有多个目标函数的优化问题称为多目标优化问题，即目标空间大于一维，因此也称为向量优化问题。如果能够找到一组决策变量的取值，使得所有目标函数均达到各自的最优值，那么这组决策变量称为多目标优化问题的绝对最优解，一般情况下这样的解往往是不存在的。我们讨论的一般情况下，多个优化目标是互斥的，一个优化目标靠近最优值时，存在其他优化目标远离其最优值，针对这种情况，多目标优化问题解的定义不同一般。基于Pareto支配关系，定义了Pareto解集和Pareto前沿来描述多目标优化问题的解。

目前基于Pareto支配关系的多目标优化算法，往往需要从目标空间值域子集中进行支配关系排序，即识别其中的非支配解，这一过程通常是整个算法中时间复杂度最高的部分，急需一种快速的Pareto前沿识别算法。

在目标空间中，显然易证Pareto前沿对应着值域的部分边界，如果能够构造算法从目标空间中快速识别出值域特定边界，那么也就解决了非支配解的识别问题。对于一般图像边缘识别问题，可以利用Sobel算子解决，近年来利用深度卷积神经网络所做的工作取得了更好的效果。因此我们尝试利用神经网络的原理来解决Pareto前沿的快速识别问题，在另外一项研究中，我们利用深度卷积-转置卷积神经网络，采用BP算法在特定数据集上训练实现Pareto前沿的识别。通过对这一过程的简化分析，本文研究提出了Pareto前沿识别的卷积核，并进行了证明，最后通过卷积神经网络进行了验证。

2 问题定义

我们的研究旨在识别多目标优化问题目标空间值域的Pareto最优前沿。这里我们给出所研究问题的数学模型以及相关概念的定义，以便后文的讨论。

2.1 多目标优化问题（MOP）

定义1 形如



的优化问题称为多目标优化问题（MOP）。其中，m维向量值函数{\f}是目标函数，n维向量{\x}是决策变量，{\D\_Y}是m维目标空间，{\D\_X}是n维决策空间，{\Omega}是可行域。

2.2 多目标优化问题的解

定义2 对于定义1中的多目标优化问题，如果存在{\x~} \in {\Omega}，使得对于任意{\x} \in {\Omega}, i=1, 2,...,m，成立{\f\_i(x~)}<={\f\_i(x)} and {\f(x~)} <> {\f(x)}，那么称{\x~}为多目标优化问题的绝对最优解。

如前所述，一般多目标优化问题的绝对最优解是不存在的，我们研究的是比它弱一点的解。首先，根据向量的偏序关系，我们给出多目标优化问题解的支配关系的定义。

定义3 对于定义1中的多目标优化问题，{\x\_1},{\x\_2} \in {\Omega}是两个决策向量，{\f\_i(x)}是目标函数第i维分量，如果{\f\_i(x\_1)}<={\f\_i(x\_2)} for {\Arbitrarily} i = 1, 2, ...,m and {\f(x\_1)} <> {\f(x\_2)}，那么称{\x\_1}支配{\x\_2}，记作{\x\_1}>{\x\_2}。

根据支配关系，我们给出多目标优化问题解的相关概念。

定义4 对于定义1中的多目标优化问题，如果存在一个{\x\*} \in {\Omega}，不存在{\Omega}中的向量支配{\x\*}，那么{\x\*}称为多目标优化问题的Pareto最优解。

定义5 对于定义1中的多目标优化问题，所有Pareto最优解构成的集合称为Pareto最优解集（PS，Pareto Set），Pareto最优解集对应的目标空间中的值域称为Pareto最优前沿（PF，Pareto Front）。

我们的研究就是从目标空间值域子集中识别相应的Pareto最优前沿。

2.3 一些假设

我们的研究基于这些基本假设，目标空间维度m=2，目标空间中待识别值域子集是已知的并且是有限的，目标空间值域图像总是位于第一象限的，否则就通过平移使得它在第一象限。

3 算法及证明

我们的算法实现的功能是从目标空间指定值域子集中识别Pareto前沿，即值域子集中非受控解对应的部分。我们的算法主要基于两个理论原理：在目标空间中，任意值域或其子集的Pareto最优前沿就是其边界的特定部分；通过设置特定的卷积核，可以识别图像边界特定部分。这里我们给出算法的构造和基本原理，最后对该方法的正确性进行证明。

3.1 问题的输入形式

分别以{\f\_1(x)}和{\f\_2(x)}为坐标轴，考虑目标空间值域的图像，再将该图像用二阶灰度数字图像表示，其中像素值1表示该像素坐标在值域中，0表示不在值域中。这个数字图像就是我们算法的输入，一个简单的例子如 图X 所示。

图X 输入示例（左边值域图像，右边数字图像矩阵）

3.2 Pareto最优前沿的图像性质

考虑一个任意目标空间值域{\Gama}（如 图X 所示），取值域任意点{\x\_0}，以{\x\_0}为原点划分象限，那么显然所有第一象限的点均被{\x\_0}点支配，同时也可以看到，坐标轴的正半轴上的点也都被{\x\_0}支配，因此Pareto前沿不在第一象限及正半坐标轴上。因此，值域的内点不是Pareto前沿，Pareto前沿必然是值域边界的子集。为了便于进一步说明，我们定义值域图像中两个特殊点{\px}和{\py}：

定义6 目标空间值域图像距离x轴最近的点记为点{\px}，距离y轴最近的点记为点{\py}。

显然，Pareto最优前沿只能位于对角点为{\px}和{\py}的矩形中，所以Pareto前沿是位于矩形{\px}-{\py}中值域边界的子集。

3.3 Pareto最优前沿的数字图像模式

考虑数字图像矩阵A=(aij)3x3，以中心元素a22为考察对象，研究它的被支配模式，有这样四种基本模式：

，，，

其中\*表示可以为{0,1}中任意值。前三种a22=1，说明考察元素本身就在值域，满足这三种模式，都表示它被支配，不是Pareto最优前沿，最后一种a22=0表示元素本身不在值域中，必然不是Pareto前沿，这四种模式就是非Pareto最优前沿的数字图像模式，我们依据这一基本原理来识别值域数字图像中的Pareto前沿。

3.3 卷积神经网络的数学原理

卷积神经网络是对一个数字图像（或者通用地说矩阵或者高阶张量）进行空间卷积操作（实际是自相关），是数字图像处理中的有力手段，卷积神经网络近年来在图像处理领域大放异彩。

假设A=(aij)mxn是一个数字图像的矩阵，是卷积单元的输入，{\h}是输出，常数矩阵B=(bij)rxs，{\Sigma}：R->R，我们给出简单卷积神经网络基本单元——卷积层的数学模型：

{\h} = {\Sigma}(F(A, B))

F(A, B) = {卷积公式}

其中矩阵B称为卷积核，{\Sigma}称为激活函数，F(A, B)就是空间卷积公式。实际上，为了使输出结果矩阵h和输入矩阵具有相同的形式，需要对A进行填充，在A的元素周围再添加一圈0元素即可，添加后的矩阵当作输入，这一操作往往就集成在卷积层内，我们不再特别说明。

3.4 算法结构及数学模型

以上两点基本原理就是我们算法所依赖的理论基础，下面我们给出算法的结构形式以及数学模型。这里再明确一下符号的含义，A=(aij)mxn是一个数字图像的矩阵，常数矩阵B=(bij)3x3是我们给出的用于识别Pareto最优前沿的卷积核，{\Sigma}(x)是激活函数，h是卷积层的输出，bit\_and(X, Y)指按矩阵X和Y对应元素进行与操作。

算法结构 如图X 所示，输入矩阵A，卷积层对A做计算得到结果h，然后h和原输入矩阵A做按元素的逻辑与操作，最后得到的result就是结果矩阵，结果矩阵中1代表Pareto最优前沿面。

图X 算法结构

下面对算法的数学模型做一介绍，首先定义Pareto最优前沿面识别卷积核。

定义7 矩阵



称为Pareto最优前沿面识别卷积核。

那么，算法的数学模型为：



其中，{\F}就是算法的数学模型，A是输入矩阵，Pareto最优前沿识别卷积核B是常数参数。用前面说明的矩阵按元素逻辑与运算bit\_and和激活函数概念，给出算法数学模型的等价形式：



也等价于：



3.5 算法正确性证明

4 仿真实验

5 结论

参考文献：

1 简介

2基础理论

3算法

4实验

5结论